Raluca Mariana COZMA

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PERPENDICULARITATE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

ISBN: 978-973-579-365-4

Editura Spiru Haret

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PERPENDICULARITATE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

I. PERPENDICULARITATE ÎN PLAN. METODE DE DEMONSTRAŢIE

În geometria plană, sunt numeroase problemele în care se cere să se arate că două drepte sunt perpendiculare sau, echivalent cu acestea, să se arate că, un anumit unghi este unghi drept, că un anumit triunghi este triunghi dreptunghic; că un anumit paralelogram (romb) este dreptunghi (pătrat).

Pentru soluţionarea cu succes a problemelor de acest tip, rezolvitorul trebuie să aibă cunoştinţe temeinice privind, în mod deosebit: noţiunile de drepte perpendiculare şi distanţa de la un punct la o dreaptă; mijlocul unui segment şi mediatoarea segmentului, bisectoarea unui unghi şi proprietăţile acestora; rezultatele privind suma unghiurilor unui triunghi sau suma unghiurilor în jurul unui punct; unele relaţii metrice în triunghi (în special în triunghiul dreptunghic), în patrulater sau în cerc. Pentru a fi realizat acest obiectiv (de a rezolva corect şi rapid probleme de acest tip), în continuare, sunt expuse mai multe metode şi tehnici de rezolvare, fiecare metodă fiind urmată de aplicaţii (probleme), care să o ilustreze, să o facă mai uşor de utilizat în activitatea la clasă.

Metoda întâi. **Demonstrarea perpendicularităţii a două drepte folosind rezultatele „privind suma unghiurilor unui triunghi sau suma unghiurilor formate în jurul unui punct”**

P1. Se dă un triunghi ABC în care $\sphericalangle B=2\cdot\sphericalangle A$, $\sphericalangle C=3\cdot\sphericalangle A$. Să se arate că ΔABC este dreptunghic.

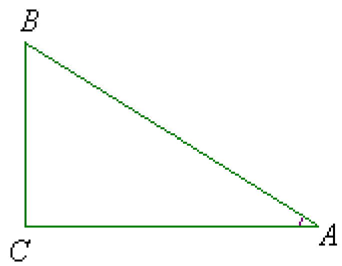

Fig. 1

Demonstraţie

Se utilizează relaţia $\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C=180° \Rightarrow \sphericalangle A=30°$, $\sphericalangle B=60°$, $\sphericalangle C=90°$

P2. Într-un pătrat $ABCD$, se notează cu M şi N mijloacele laturilor BC, respectiv CD. Să se demonstreze că dreptele AM şi BN sunt perpendiculare.

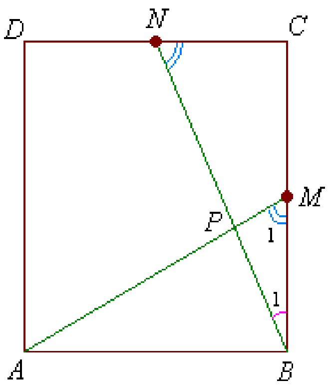

Fig. 2

Demonstrație

Fie P intersecţie a dreptelor AM şi BN. Din congruenţa ΔABM şi $\Delta BCN \Rightarrow \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NBC$ şi $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BNC$.

Din $\sphericalangle P + \sphericalangle M_1 + \sphericalangle B_1 = 180° \Rightarrow \sphericalangle P = 90°$, deoarece $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle MAB \Rightarrow AM \perp BN$.

P3. Se dă un patrulater inscriptibil *ABCD* şi se notează cu *E* punctul comun laturilor *AD* şi *BC*. Perpendicularele în *C* şi *D*, respectiv pe *CB* şi *DA* se intersectează în punctul *I*. Să se demonstreze că, dreapta *EI* este perpendiculară pe *AB*.

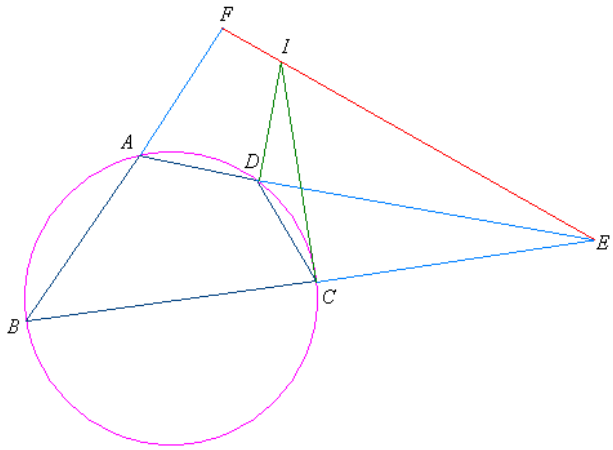

Fig. 3

Demonstrație

Fie *F* intersecţia dreptelor *EI* şi *AB*. Avem că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CDE$ (au acelaşi suplement şi anume $\sphericalangle ADC$). Patrulaterul *DECI* este inscriptibil pentru că $\sphericalangle IDE + \sphericalangle JCE = 90° + 90° = 180°$ $\Rightarrow \sphericalangle IDC \equiv \sphericalangle IEC$.

Deci, $\sphericalangle FBE + \sphericalangle BEF = \sphericalangle CDE + \sphericalangle IDC = 90°$

Cum $\sphericalangle FBE + \sphericalangle BEF = 90° \Rightarrow EI \perp AB$.

P4. În triunghiul *ABC*, perpendiculara în *C* pe *BC*, intersectează pe *AB* în *M*, iar perpendiculara în *A* pe *AB* intersectează pe *BC* în *N*. Perpendiculara în *M* pe *AB* şi perpendiculara în *N* pe *BC* se intersectează în *P*. Să se arate că *BP* este perpendiculară pe *AC*.

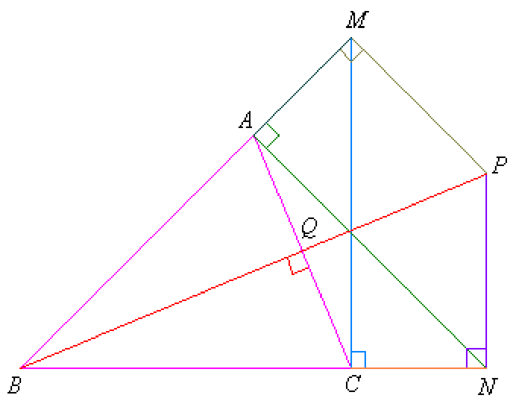

Fig. 4

Demonstraţie

Fie Q intersecţia dreptelor BP şi AC. Patrulaterul $AMNC$ este inscriptibil, pentru că $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MCN$ ($=90°$) $\Rightarrow$ $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle BAC$.

Patrulaterul $MBNP$ este inscriptibil pentru că $\sphericalangle BMP + \sphericalangle BNP = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$ $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle MBP$.

În ΔBNP, avem că $\sphericalangle BNM + \sphericalangle MNP = 90°$ şi cum $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle MBP$ şi $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle BAC$ $\Rightarrow$ în ΔABQ are loc relaţia $\sphericalangle ABQ + \sphericalangle BAQ = 90°$, adică $AQ \perp BQ$ $\Rightarrow$ $AC \perp BP$.

P5. Să se arate că, dacă un unghi al unui triunghi are 45°, atunci dreptele care unesc picioarele înălţimilor duse pe laturile acestui unghi cu mijlocul laturii opuse, sunt perpendiculare.

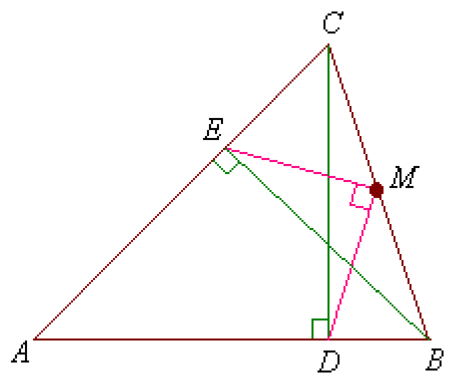

Fig. 5

Demonstraţie

Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle BAC)=45°$;

Fie $CD \perp AB$, $BE \perp AC$ şi M mijlocul lui BC.

Se observă din triunghiurile dreptunghice BDC şi CEB, că triunghiurile BMD şi CME sunt isoscele.

Avem $m(\sphericalangle EMC)=180°-2\cdot m(\sphericalangle C)$, $m(\sphericalangle DMB)=180°-2\cdot m(\sphericalangle B) \Rightarrow$ $m(\sphericalangle EMC + \sphericalangle DMC)=60°-2\cdot m(\sphericalangle B + \sphericalangle C)=360°-2\cdot 135°=90°$, adică $\sphericalangle DME)=90°$ $\Rightarrow DM \perp ME$.

Metoda a doua. **Demonstrarea perpendicularității a două drepte folosind reciproca teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic**

P1. Să se arate că ΔABC, în care AB=5, AC=12 şi BC=13, este dreptunghic.

Demonstraţie

Cum $13^2=5^2+12^2$, adică $BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow$ conform reciprocei teoremei lui Pitagora, că ΔABC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle BAC)$=90°.

P2. În triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A$=90°), se duce înălţimea AD $(D \in BC)$. Se uneşte D cu mijloacele E şi F ale laturilor AB şi AC. Să se arate că $m(\sphericalangle FDE)$=90 °.

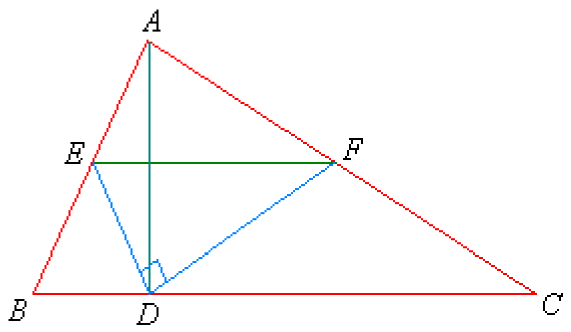

Fig. 6

Demonstraţie

Notăm: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Din triunghiul dreptunghic ADB, cu DE mediană,avem $DE=\frac{c}{2}$. Analog, se obţine $DF=\frac{b}{2}$. Pe de altă parte, EF fiind linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow$ $EF=\frac{a}{2}$. Se verifică, imediat, că $EF^2=DE^2+DF^2$(prin ipoteză, $a^2=b^2+c^2$)$\Rightarrow$ $m(\sphericalangle FDE)$=90°.

P3. Se consideră un trapez dreptunghic $ABCD$ ($m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)$=90°), în care cele două baze au lungimile $AB=a$ şi $CD=b$, iar latura neparalelă $BC=a+b$. Dacă E este mijlocul laturii neparalele AD, să se arate că ΔBEC este dreptunghic.

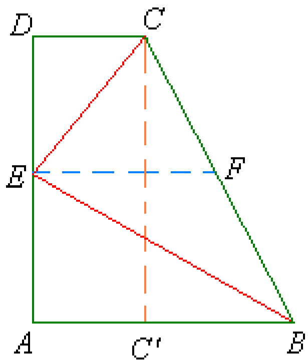

Fig. 7

Demonstraţie

Fie $CC' \perp AB$, cu $C' \in AB \Rightarrow AD = 2\sqrt{ab}$, $CE = \sqrt{b^2 + ab}$, $BE = \sqrt{a^2 + ab}$.

Prin calcul, se obţine că $CE^2 + BE^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta BEC$ este dreptunghic, cu $m(\sphericalangle E)$=90°.

Observaţie:

Problema putea fi rezolvată mai simplu, folosind rezultatul că dacă mediana unui triunghi este cât jumătate din latura pe care cade, atunci triunghiul este dreptunghic.

P4. Să se arate că, dacă între laturile unui triunghi are loc relaţia $b^2(c^4 + a^4 - b^4) = c^2(a^4 + b^4 - c^4)$, atunci triunghiul este dreptunghic sau isoscel.

Demonstraţie

Efectuând calculele, se obţine că: $(b^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$ şi cum $a^2+b^2+c^2 \neq 0 \Rightarrow$ sau $b^2-c^2=0$ sau $a^2-b^2-c^2=0$, adică sau $b=c$ sau $a^2=b^2+c^2$ $\Rightarrow$ fie că triunghiul estre isoscel, fie este dreptunghic.

***Metoda a treia.* Demonstrarea perpendicularităţii a două drepte folosind rezultatul că „Dacă într-un triunghi oarecare se pun în evidenţă două înălţimi, atunci dreapta care uneşte cel de al treilea vârf al triunghiului cu ortocentrul este perpendiculară pe latura a treia (este a treia înălţime în triunghi)."**

P1. Unghiurile opuse A şi C ale patrulaterului convex $ABCD$ sunt drepte. Dacă E şi F sunt punctele de intersecţie ale dreptelor AD şi BC, respectiv BA şi CD, să se demonstreze că BD este perpendiculară pe EF.

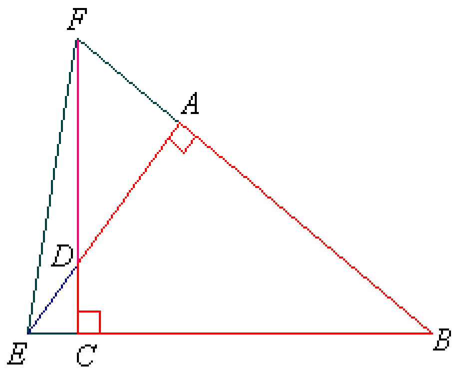

Fig. 8

Demonstrație

În ΔBEF, avem $EA \perp BF$ și $FC \perp BE$, iar D este punctul de intersecție al înălțimilor EA și $FC \Rightarrow BD \perp EF$.

P2. O dreaptă *d*, perpendiculară pe ipotenuza *BC* a unui triunghi dreptunghic *ABC*, intersectează cateta *AB* și prelungirea lui *AC* în punctele *D* și *E*. Să se arate că *CD* este perpendiculară pe *BE*.

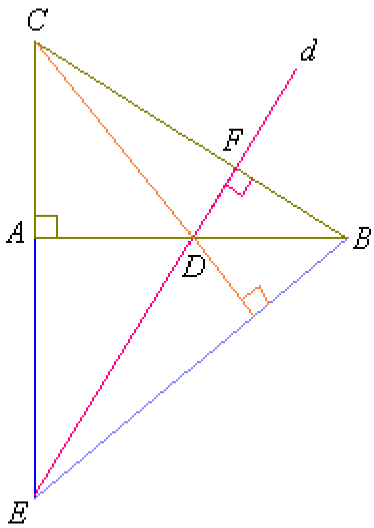

Fig. 9

Demonstrație

Fie *F* intersecția dreptei *d* cu ipotenuza *BC*. În ΔBCE, avem $EF \perp BC$ și $AB \perp CE$, iar *D* este punctul de intersecție al înălțimilor *EF* și $AB \Rightarrow CD \perp BE$.

P3. În triunghiul echilateral *ABC*, se duce înălțimea *AD* și se prelungește *BC*, dincolo de *B*, cu segmentul *BM*=*BD*. Fie *N* mijlocul segmentului *AB*. Dreapta *MN* intersectează pe *AD* în *P*. Să se arate că dreapta *CP* este perpendiculară pe *AM*.

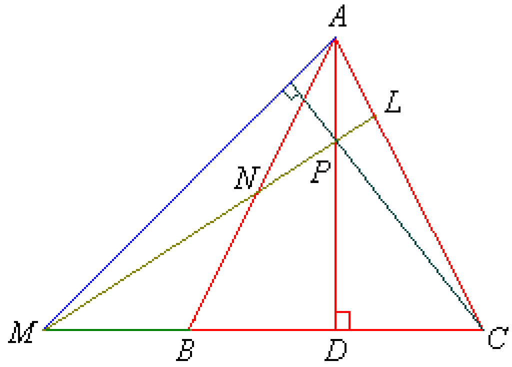

Fig. 10

Demonstraţie

Notăm cu L intersecţia dreptelor MP şi AC. Cum $BN=BM \Rightarrow \Delta MBN$ este isoscel $\Rightarrow$ $\sphericalangle NMB \equiv \sphericalangle MNB$ ($=30°$).

În ΔLMC, avem $m(\sphericalangle LMC)=30°$ şi $m(\sphericalangle LCM)=60°$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle MLC)=90°$. Cum în ΔAMC, avem că $AD \perp MC$ şi $ML \perp AC$ $\Rightarrow CP \perp AM$.

P4. Pe un cerc se iau punctele C şi D, de o parte şi de alta a diametrului AB. Fie M şi N punctele de intersecţie ale dreptelor BC şi AD, respectiv BD şi CA. Să se demonstreze că MN este perpendiculară pe AB.

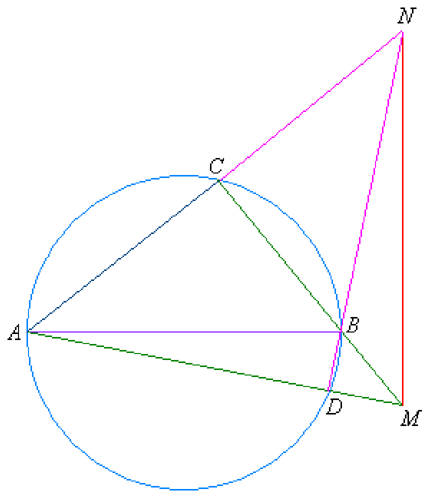

Fig. 11

Demonstraţie

Deoarece AB este diametrul cercului $\Rightarrow \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB$ ($=90°$) $\Rightarrow$ $MD \perp BM$ şi $NC \perp MB$. Cum punctul A este intersecţia lui MD cu NC $\Rightarrow$ A este ortocentrul $\Delta MBN \Rightarrow$ $BA \perp MN$.

P5. Într-un dreptunghi $ABCD$, bisectoarea unghiului BAD intersectează diagonala BD în punctul E, iar latura BC în F. Ştiind că paralela dusă din E la latura AB intersectează diagonala AC în C, să se demonstreze că dreptele GF şi BD sunt perpendiculare.

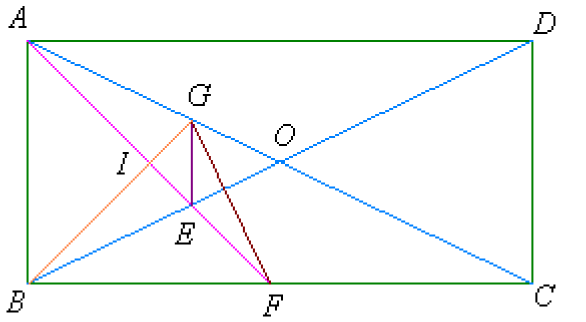

Fig. 12

Demonstrație

Notăm cu O intersecția diagonalelor AC și BD, cu I intersecția dreptelor AE și BG. Din $AO=BO$ și $EG \parallel AB \Rightarrow$ patrulaterul $ABEG$ este trapez isoscel și, cum $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle FAD (=90^\circ)$ $\Rightarrow IF \perp BG$

Din $EG \parallel AB$ și $BA \perp BC \Rightarrow GE \perp BF$.

Din $IF \perp BG$ și $GE \perp BF \Rightarrow$ punctul E este ortocentrul triunghiului BGF $\Rightarrow$ $BE \perp GF \Rightarrow BD \perp GF$.

Metoda a patra. **Demonstrarea perpendicularității a două drepte folosind rezultatul că „Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice dreaptă perpendiculară pe una dintre ele este perpendiculară și pe cealaltă.”**

P1. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), fie D piciorul înălțimii dusă din A pe latura BC. Să se demonstreze că perpendiculara dusă din D pe latura AC este tangentă la cercul circumscris ΔABD.

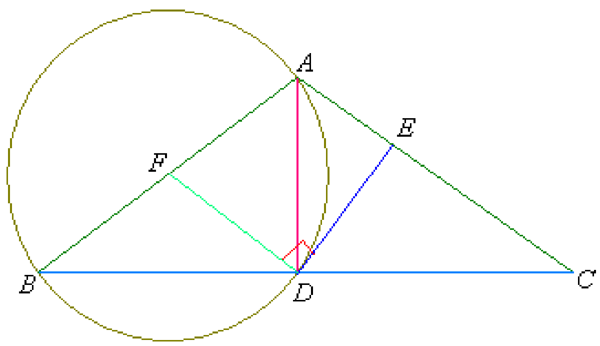

Fig. 13

Demonstrație

Fie E punctul de intersecție al perpendicularei dusă din D pe AC și fie F centrul cercului circumscris ΔADB.

Din FA=FB şi DB=DC $\Rightarrow$ $DF \| AC$. Cum din ipoteză, $DE \perp AC$ $\Rightarrow$ $DE \perp FD$ şi, deci, DE este tangentă la cercul de centru F.

P2. Să se demonstreze că, dacă într-un trapez dreptunghic distanţa dintre baze este medie proporţională între lungimile bazelor, atunci diagonalele lui sunt perpendiculare.

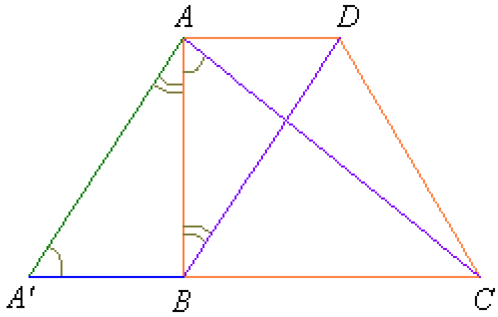

Fig. 14

Demonstraţie

Fie BC baza mare şi AD baza mică, AB şi DC fiind laturile neparalele.

Ducem $AA' \| BD$, A' fiind intersecţia cu dreapta BC $\Rightarrow$ patrulaterul $AA'BD$ este paralelogram şi, deci, $AD = A'B$.

Din ipoteză, avem $AB^2 = AD \cdot BC$ $\Rightarrow$ $AB^2 = A'B \cdot BC$ $\Rightarrow$ $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{AB}$ şi $\sphericalangle ABA' \equiv \sphericalangle ABC$ $(= 90°)$ $\Rightarrow$ $\Delta ABA' \sim \Delta ABC$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle AA'B$.

Dar, $\sphericalangle A'AB \equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne) şi cum $m(\sphericalangle A'AB)+m(\sphericalangle AA'B)=90°$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle A'AB)+m(\sphericalangle BAC)=90°$ $\Rightarrow$ $AA' \perp AC$.

Din $A'A \| BD$ şi $AC \perp AA' \Rightarrow AC \perp BD$.

***Metoda a cincea.* Demonstrarea perpendicularităţii a două drepte folosind rezultatul că „Dacă într-un triunghi *ABC*, cu *M* mijlocul laturii *BC* şi $AM = \frac{1}{2}BC$, atunci triunghiul *ABC* este dreptunghic în unghiul *A*."**

P1. Se dau dreptele Ox, Oy concurente în punctul O. Pe Ox se ia un punct oarecare A şi pe Oy un punct B cu OB=OA. Dacă se construieşte B', simetricul punctului B în raport cu O pe Oy, să se arate că $BA \perp AB'$.

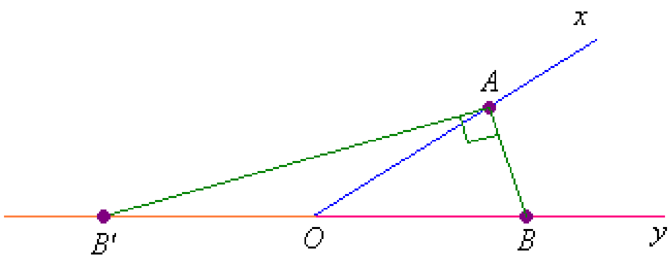

Fig. 15

Demonstrație

În $\Delta BAB'$ avem $OA = \frac{1}{2} BB'$ și $OB=OB'$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle BAB')=90°$ $\Rightarrow$ $BA \perp AB'$.

P2. Se dă triunghiul isoscel *ABC* ($AB = AC$) și se prelungește latura *BA* cu lungimea *AD*=*AB*, apoi se duce dreapta *DC*. Să se arate că unghiul *DCB* este un unghi drept.

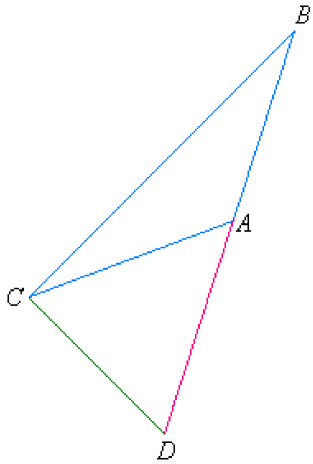

Fig. 16

Demonstrație

În ΔBCD, avem $AC=AB=AD=\frac{BD}{2}$ $\Rightarrow \Delta BCD$ este dreptunghic în *C*, adică

$m(\sphericalangle DCB)=90°$.

Metoda a șasea. **Demonstrarea perpendicularității a două drepte folosind rezultatul că „Dacă două unghiuri sunt congruente sau suplementare și au o pereche de laturi perpendiculare, atunci și celelalte laturi sunt perpendiculare."**

P1. Trapezul isoscel *ABCD*, cu baza mare *AB*, are diagonalele perpendiculare, *E* fiind punctul lor de intersecție și *F* simetricul lui *A* față de *E*. Să se arate că, dreptele *BC* și *DF* sunt perpendiculare.

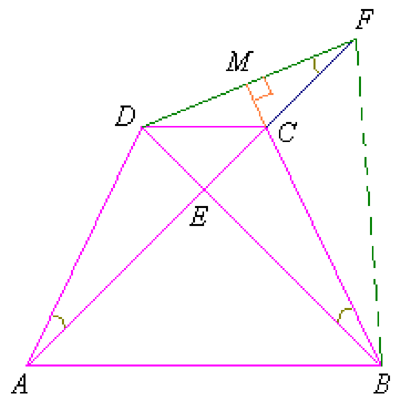

Fig. 17

Demonstrație

$F = sim_A BD \Rightarrow AE = EF, AE \perp BD \Rightarrow DE$ mediană și înălțime $\Rightarrow \Delta ADF$ isoscel $\Rightarrow$ $\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle DFE$.

Dar, $\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle DBC$ și atunci $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DFE$. Cum $DB \perp FE \Rightarrow BC \perp DB$.

P2. În triunghiul *ABC*, medianele *BB'* și *CC'* sunt perpendiculare. Fie *B''* și *C''* intersecțiile lor cu cercul circumscris triunghiului *ABC*. Să se demonstreze, că dreapta *B''C''* este perpendiculară pe mediana din *A*.

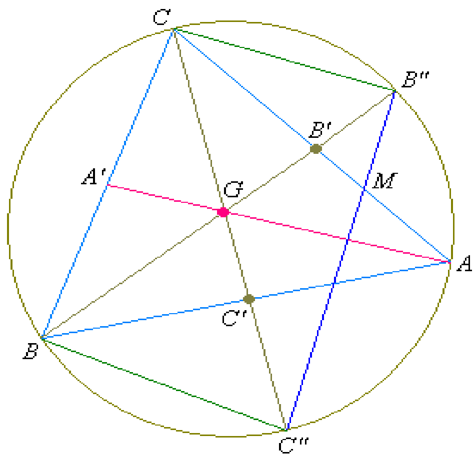

Fig. 18

Demonstrație

Fie *G* c. g. al ΔABC, *A'* piciorul medianei *AG*, *M* intersecția dreptelor *AA'* și *B''C''*.

Patrulaterul *BCB''C''* este inscriptibil și avem $\sphericalangle CBB'' \equiv \sphericalangle CC''B''$.

Din ΔBGC ($m(\sphericalangle BGC)$=90 °, din ipoteză) cu *GA'* mediană $\Rightarrow$ $\sphericalangle A'BG \equiv \sphericalangle A'GB$.

Din $\sphericalangle CBB'' \equiv \sphericalangle CC''B''$ și $\sphericalangle A'BG \equiv \sphericalangle A'GB \Rightarrow \sphericalangle A'GB \equiv \sphericalangle CC''B''$.

Din $\sphericalangle A'GB \equiv \sphericalangle CC''B''$ și $BG \perp C''C$ (din ipoteză) $\Rightarrow C''B'' \perp A'A$.

P3. Într-un triunghi *ABC*, având toate unghiurile ascuțite, iar înălțimea *AD* egală cu baza *BC*, se construiește pe *CD*, ca latură, pătratul *CDEF* și pe *BD*, ca latură, pătratul *BDGH*, ambele pătrate fiind situate de aceeaşi parte a dreptei *BC*, ca şi vârful *A*. Să se arate că dreptele *BF* şi *CH* sunt înălţimile prelungite ale triunghiului *ABC*.

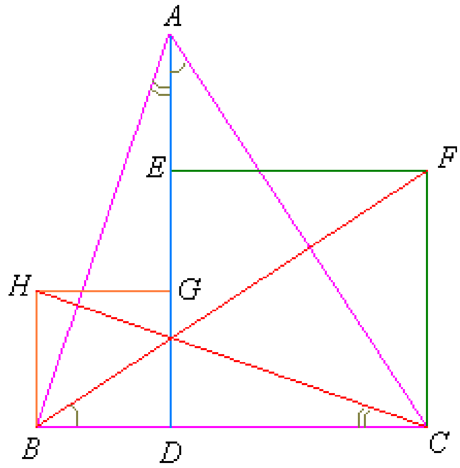

Fig. 19

Demonstraţie

Triunghiurile dreptunghice *ACD* şi *BFC* sunt congruente, pentru că: *AD*=*BC* (din ipoteză) şi *DC*=*CF* (prin construcţie) $\Rightarrow$ $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle FBC$.

Din $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle FBC$ şi $AD \perp BC$ $\Rightarrow$ $BF \perp AC$. Analog, din congruenţa triunghiurilor dreptunghice *ABD* şi *BCH* $\Rightarrow$ $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCH$ şi cum $AD \perp BC$ $\Rightarrow$ $CH \perp AB$.

***Metoda a şaptea.* Demonstrarea perpendicularităţii a două drepte folosind rezultatul „Congruenţa (sau asemănarea) a două triunghiuri, dintre care, se ştie, ca unul este dreptunghic."**

Folosind această metodă, trebuie să se facă apel la un alt caz de congruenţă (sau de asemănare), în care nu trebuie să intervină unghiul ce trebuie arătat că este drept.

P1. Se dă dreptunghiul *ABCD* şi fie *E* piciorul perpendicularei dusă din *A* pe diagonala *BD*. Se prelungeşte *AE* cu segmentul *EF*=*AE*. Să se arate că $BF \perp DF$.

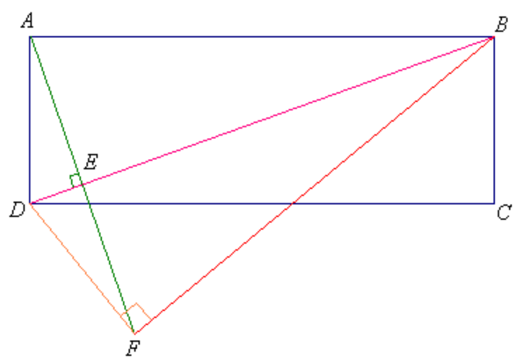

Fig. 20

Demonstraţie

Triunghiurile *ADF* şi *ABF* sunt isoscele ($AF \perp BD$ şi $AE=EF$). Triunghiurile *ABD* şi *DBF* sunt congruente, pentru că $AD=DF$, $AB=BF$ şi *BD* latură comună $\Rightarrow$ $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BFD$ şi cum $m(\sphericalangle DAB)=90°$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle BFD)=90°$ $\Rightarrow$ $BF \perp DF$.

P2. Fie *C* şi *C'* două cercuri tangente în *A*, *h* tangenta comună la *C* şi *C'* care conţine pe *A*, *M* fiind un punct al lui *h*, diferit de *A*, cercul de centru *M* şi de rază *MA* taie pe *C* în *A* şi *B*, iar pe *C* în *A* şi *B'*. Să se demonstreze că, dreptele *MB* şi *MB'* sunt, respectiv, tangente la cercurile *C* şi *C'*.

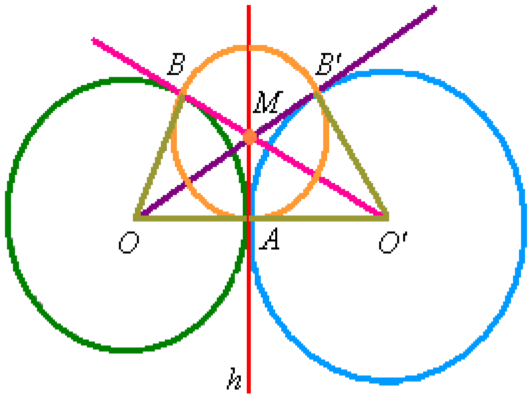

Fig. 21

Demonstraţie

Se deosebesc două situaţii:

a) cercurile sunt tangente exterioare;

b) cercurile sunt tangente interioare.

Rezolvăm problema atunci când cercurile sunt tangente exterioare, procedându-se analog şi atunci când cercurile sunt tangente interioare.

Triunghiurile *OMA* şi *OMB* sunt congruente, pentru că *MA=MB* (ca raze ale cercului cu centrul în *M*), *OA=OB* (ca raze ale cercului *C* de centru *O*) şi *OM* este latură comună $\Rightarrow$ $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OBM$ şi cum $m(\sphericalangle OAM)=90°$ (din ipoteză) $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle OBM)=90°$ $\Rightarrow$ $MB \perp OB$. Analog, se arată că $MB' \perp O'B'$.

P3. Fie *M* un punct pe ipotenuza *BC* a triunghiului dreptunghic *ABC*. O dreaptă arbitrară dusă prin *M* taie cercul ce trece prin punctele *A*, *B* şi *M* în *E* şi cercul ce trece prin *A*, *C* şi *M* în *F*. Să se arate că, dreptele *AE* şi *AF* sunt perpendiculare.

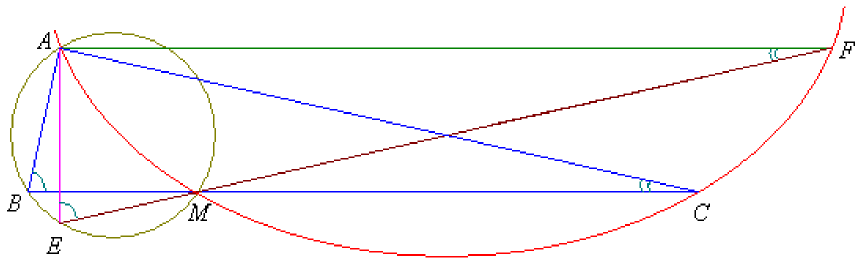

Fig. 22

Demonstraţie

Triunghiurile EAF şi ABC sunt asemenea, pentru că $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle ABM$ şi $\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle ACB$, ca având aceeaşi măsură $\Rightarrow$ $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle BAC$ şi, cum $m(\sphericalangle BAC)=90° \Rightarrow$ $m(\sphericalangle EAF)=90° \Rightarrow$ $AE \perp AF$.

***Metoda a opta.* Demonstrarea perpendicularităţii a două drepte folosind definiţiile „Paralelogramul (rombul) cu un unghi drept este un dreptunghi (pătrat)."**

P1. Două cercuri, de centre O_1 şi O_2, sunt. tangente exterioare în punctul T. Fie T_1, T_2 punctele de contact ale unei tangente, comune exterioare, iar A_1 şi A_2 punctele diametral opuse lui T în cercurile O_1 şi O_2, respectiv. Să se demonstreze că dreptele A_1T_1 şi A_2T_2 sunt perpendiculare, iar punctul lor de intersecţie, M, se află pe tangenta comună în punctul T.

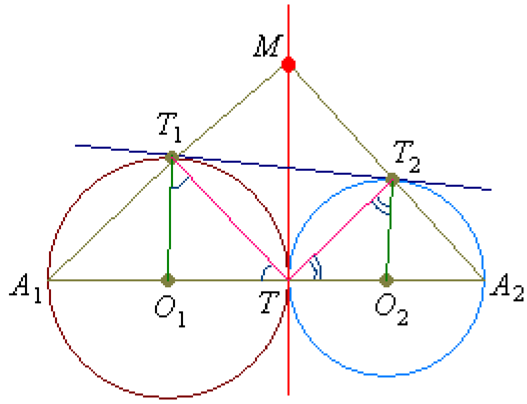

Fig. 23

Demonstraţie

Din triunghiurile isoscele O_1T_1T şi O_2T_2T, se obţine $m(\sphericalangle O_1TT_1) = 90° - \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle T_1O_1T)$ şi $m(\sphericalangle O_2TT_2) = 90° - \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle T_2O_2T)$. Cum $\sphericalangle T_1O_1T$ şi $\sphericalangle T_2O_2T$ sunt suplimentare $\Rightarrow$ $\sphericalangle O_1TT_1$ şi $\sphericalangle O_2TT_2$ sunt complementare $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle T_1TT_2)=90°$.

Dar, $m(\sphericalangle A_1T_1T)=90° \Rightarrow MT_1 \parallel TT_2$.

Analog, se arată că $MT_2 \parallel TT_1$.

Paralelogramul MT_1TT_2, având $m(\sphericalangle T_1TT_2)=90°$, este un dreptunghi şi, deci, $A_1M \perp A_2M$, M fiind situate pe tangenta comună în punctul T.

***Metoda a noua.* Demonstrarea perpendicularităţii a două drepte folosind una din teoremele „a) un patrulater este inscriptibil, dacă şi numai dacă două unghiuri opuse sunt suplementare; b) un patrulater este inscriptibil, dacă şi numai dacă, unghiul format de o latură cu o diagonală este congruent cu unghiul format de latura opusă cu cealaltă diagonală"**

Fiecare dintre aceste teoreme, în rezolvarea problemei respective, va fi folosită atunci când unul dintre unghiurile patrulaterului, sau un unghi format de o diagonală cu o latură, are măsura de 90°.

P1. Fie AA', BB' şi CC' bisectoarele unghiurilor unui triunghi ABC. Perpendiculara din B pe BB' intersectează dreapta AA' în M. Să se demonstreze că $MC \perp CC'$.

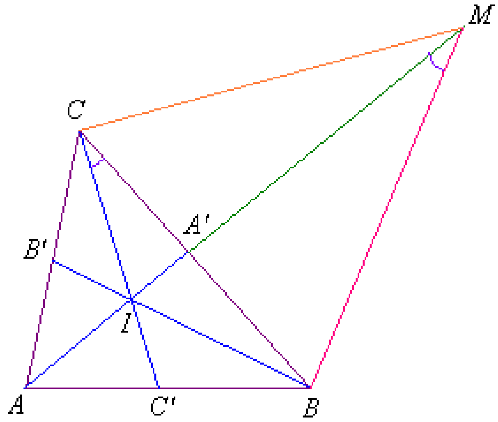

Fig. 24

Demonstraţie

Fie I punctul de intersecţie al bisectoarelor AA', BB' şi CC'. Arătăm, mai întâi, că patrulaterul $BICM$ este inscriptibil.

Într-adevăr, $m(\sphericalangle AMB) = 180° - m(\sphericalangle AMB + \sphericalangle BAM) = 180° - (90° + \frac{m(\sphericalangle B)}{2} + \frac{m(\sphericalangle A)}{2}) =$

$= 90° - \frac{m(\sphericalangle A + \sphericalangle B)}{2} = \frac{180° - (180° - m(\sphericalangle C)}{2} = \frac{m(\sphericalangle C)}{2} = m(\sphericalangle ICB)$

Cum, $m(\sphericalangle IBM) = 90°$ (din ipoteză) $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle ICM)=90°$ $\Rightarrow$ $MC \perp CC'$.

P2. Se dă semicercul cu diametrul *AB* şi *C* un punct oarecare pe acest semicerc. Se iau, apoi, arcele *BD*=*DE*. Se uneşte *C* cu *B* şi cu *D*, iar *A* cu *D* şi cu *E*. Dreptele *AD* şi *CB* se intersectează în *F*, iar *AE* şi *CD* în *G*. Să se arate că $AE \perp FG$.

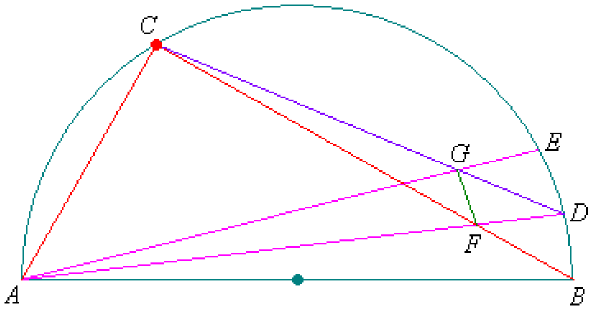

Fig. 25

Demonstraţie

Cum $\sphericalangle DCB \equiv \sphericalangle EAD$ (au aceeaşi măsură, prin ipoteză arc*DB*=arc*DE*) $\Rightarrow$ patrulaterul *ACGF* este inscriptibil. Deoarece $m(\sphericalangle ACF)=90°$ este înscris într-un semicerc $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle ACF)=90°$ $\Rightarrow$ $AE \perp FG$.

II. PERPENDICULARITATE ÎN SPAŢIU. METODE DE DEMONSTRAŢIE

Relaţia de perpendicularitate în spaţiu are, ca şi relaţia de paralelism în spaţiu, o sferă de funcţionalitate mai complexă decât în plan.

Crucială se dovedeşte în întreprinderea de a defini conceptele de perpendicularitate (a două drepte, a unei drepte pe un plan, a două plane) *teorema lui Euclid* la care am făcut deja referire. Dând o condiţie minimală suficientă de perpendicularitate a unei drepte incidente unui plan pe aceasta, *teorema lui Euclid* are consecinţe decisive privind perpendicularitatea unei drepte pe un plan şi, în acelaşi timp, oferă posibilitatea definirii relaţiei de perpendicularitate în mulţimea dreptelor spaţiului euclidian. În acest ultim sens, drept consecinţă a *teoremei lui Euclid,* se poate enunţa:

Metoda întâi. **Dreapta *d* este perpendiculară pe dreapta *d'* dacă *d* este perpendiculară pe un plan care conţine dreapta *d'*.**

Metoda a doua. **Teorema a celor trei perpendiculare, direct sau prin consecinţele ei.**

Metoda a treia. **Dacă dreptele *d* şi *d'* sunt paralele şi dreapta *a* este perpendiculară pe *d*, atunci *a* este perpendiculară pe *d'*.**

Metoda a patra. **Dacă planele α şi β sunt perpendiculare pe planul γ şi nu sunt paralele, atunci dreapta comună lor este perpendiculară pe planul γ.**

Metoda a cincea. **Planul α este perpendicular pe planul β dacă (şi numai dacă) conţine o dreaptă perpendiculară pe planul β.**

Metoda a şasea. **Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă perpendiculară pe unul din plane este perpendiculară şi pe celălalt plan.**

Metoda a şaptea. **Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice plan perpendicular pe una din drepte este perpendicular şi pe cealaltă dreaptă.**

Metoda a opta. **Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă conţinută de unul din ele şi perpendiculară pe muchia planelor este perpendiculară pe celălalt plan.**

Metoda a noua. **Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă perpendiculară pe muchia planelor, situată în unul din plane, este perpendiculară pe celălalt plan.**

Metoda a zecea. **Dacă un plan este paralel cu o dreaptă perpendiculară pe alt plan, atunci cele două plane sunt perpendiculare.**

Probleme care reflectă aceste metode

P1. Fie *ABCDA'B'C'D'* cub. Arătaţi că dreapta *AC'* este perpendiculară pe planele *(A'BD)* şi *(D'B'C)*.

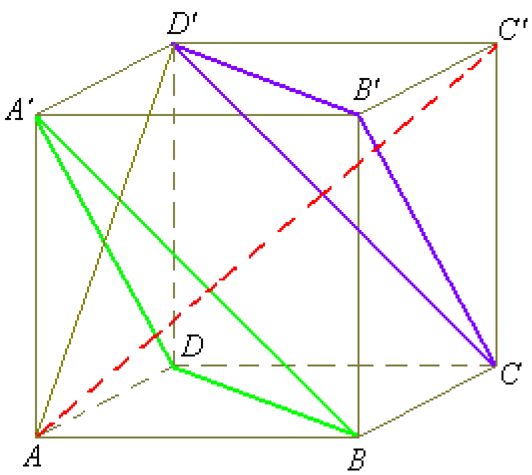

Fig. 26

Demonstrație

Din $C'D' \perp A'D$ și $A'D \perp AD'$ rezultă $A'D \perp (AD'C')$. Cum $AC' \subset (AD'C')$, rezultă $A'D \perp AC'$. Analog, $AC' \perp BD$, de unde $AC' \perp (A'DB)$.

La fel, se arată că $AC' \perp (D'B'C)$ (sau, metoda a doua: se arată că planele $(A'DB)$ și $(D'B'C)$ sunt paralele si atunci rezultă concluzia).

P2. Triunghiul *ABC* este isoscel, *AB*=*AC*, *M* este mijlocul lui [*BC*] și *AN* este perpendiculară pe planul (*ABC*). Arătați că *MN* și *BC* sunt perpendiculare.

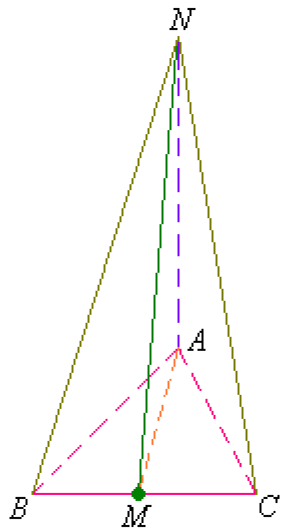

Fig. 26

Demonstrație

BC este perpendiculară pe *AM*, deoarece triunghiul este isoscel, și pe *AN*, deoarece *AN* este perpendiculară pe planul (*ABC*).

În consecință, *BC* este perpendiculară pe planul (*ANM*) și, deci, pe *MN*.

P3. Fie α și β două plane distincte, a căror intersecție este dreapta *d* și fie *M* un punct neincident nici unuia din planele α și β. Fie M_1, M_2, proiecțiile punctului *M* pe planul α, respectiv β. Arătați că dreapta *d* este perpendiculară pe planul (MM_1M_2).

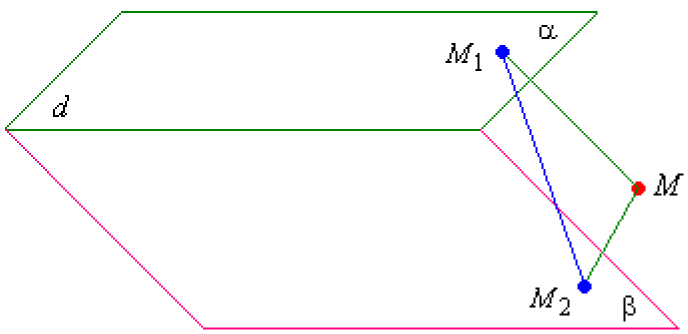

Fig. 28

Demonstraţie

Deoarece $MM_1 \perp \alpha \Rightarrow d \perp MM_1$. Analog, $d \perp MM_2 \Rightarrow d \perp (MM_1M_2)$.

P4. Arătaţi că pentru orice drepte necoplanare, există o dreaptă şi numai una care le intersectează şi care este perpendiculară pe fiecare din ele.

Demonstraţie

Fie d_1 şi d_2 cele doua plane necoplanare. Fie (π_1) planul care conţine pe d_1 şi este paralel cu d_2.

Există un unic plan care conţine pe d_2 şi este perpendicular pe (π_1), fie el α_2 şi fie α_1 planul care conţine pe d_1 şi este perpendicular pe d_2.

Planele α_1 şi α_2 un pot fi paralele (în caz contrar, planul α_2 ar tăia planul (π_1) după o dreaptă d_2 paralelă cu d_1 şi ar rezulta că d_1 şi d_2 ar fi coplanare).

Prin urmare planele α_1 şi α_2 au o dreaptă comună, *d*. Dreapta *d* este perpendiculară pe fiecare din dreptele d_1 şi d_2 şi le intersectează.

<u>*Observaţie.*</u> Dreapta *d* se numeşte *perpendiculară comună a dreptelor* d_1 *şi* d_2.

Dacă A_1 şi A_2 sunt punctele ei de intersecţie cu d_1 şi d_2, lungimea segmentului $[A_1A_2]$ se numeşte *distanţa dintre dreptele* d_1 *şi* d_2.

P5. Să se demonstreze că dacă un tetraedru are doua perechi de muchii opuse perpendiculare, atunci şi a treia pereche este formată din drepte perpendiculare.

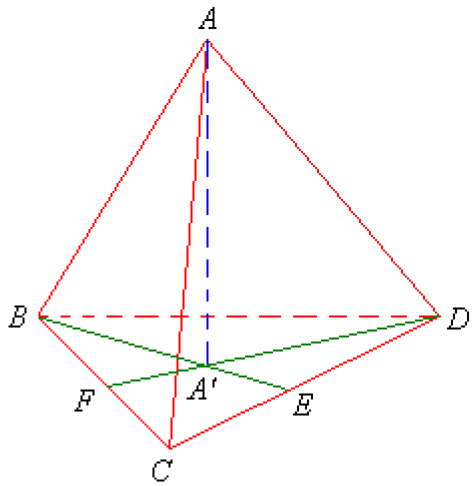

Fig. 29

Demonstraţie

Fie $AB \perp CD$ şi $BC \perp AD$; să arătăm că $BD \perp AC$. Deducem $AE \perp CD$ şi $AF \perp BC$. Din $AB \perp CD$ şi $AE \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABE)$. Din $AF \perp BC$ şi $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (ADF)$.

Planele (*ABE*) şi (*ADF*) au un punct comun; atunci intersecţia lor este o dreapta şi fie aceasta *AA'*. Atunci, $CD \perp AA'$, $BC \perp AA' \Rightarrow AA' \perp (BCD)$.

Deoarece $A' \in BE \cap FD \Rightarrow BE \perp DC$, $DF \perp BC$ şi deci *A'* este ortocentrul triunghiului *BCD*. Din $CA' \perp BD$, $AA' \perp (BCD)$, $AA' \perp BD \Rightarrow BD \perp (AA'C)$ şi deci $BD \perp AC$.

P6. Se dă un plan α si o dreaptă *d* oblică, faţă de planul dat, al cărei punct de intersecţie cu planul este *A*. Din *A* se duc în planul α dreptele *AD* şi *AC* astfel ca $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BAD$ şi *AD*=*AC*. Să se arate că dreapta care uneşte un punct oarecare *B*, situat pe dreapta *d*, cu mijlocul *N* al dreptei *DC* este perpendiculară pe *DC*.

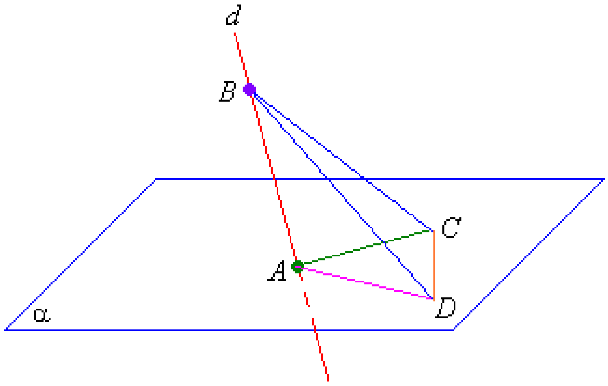

Fig. 30

Demonstraţie

Se observă că triunghiurile *ABD* şi *ABC* sunt congruente $\Rightarrow$ ΔBDC este isoscel, oricare ar fi poziţia punctului *B* pe dreapta dată, iar *BN* este mediană şi înălţime in ΔBCD.

P7. Fie patru puncte necoplanare *A*, *B*, *C*, *D* astfel încât $AB \perp (BCD)$ şi $m(\sphericalangle CBD)=120^0$. Fie *M* mijlocul segmentului *CD*. Să se demonstreze că $AM \perp BD$ dacă şi numai dacă *BC*=2*BD*.

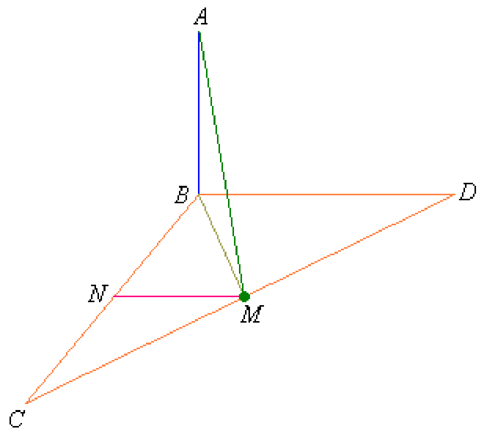

Fig. 31

Demonstraţie

"$\Rightarrow$"

Presupunem că $AM \perp AB$ şi să demonstrăm că BC=2 BD. Pentru aceasta, fie N mijlocul segmentului BC; atunci MN este linie mijlocie în ΔBCD şi deci $MN \| BD$. Dacă $BD \perp AM$ şi $AB \perp (BCD)$ $\Rightarrow$ $AB \perp BD$ $\Rightarrow$ $BD \perp (ABM)$ $\Rightarrow$ $BD \perp BM$ şi cum $m(\sphericalangle CBD)=120^0$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle CMB)=30^0$. Deoarece $MN \| BD$ şi $BD \perp BM$, atunci $MN \perp BM$.

În triunghiul BMN ($m(\sphericalangle M=90^0$, $m(\sphericalangle NBM)=30^0$), avem $MN=\dfrac{BN}{2}$; $NB=2\cdot MN$, deci $BC=2BN=4\cdot MN=4\cdot \dfrac{BD}{2}=2\cdot BD$.

"$\Leftarrow$"

Presupunem că $BC = 2BD$;

Să demonstrăm că $BD \perp AM$. Dacă $BC=2BD$, avem $NB=\dfrac{BC}{2}=BD=2\cdot MN$ $\Rightarrow$ în ΔBMN că $NB=2\ MN$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle NBM)=30^0$ şi cum $m(\sphericalangle NBD)=120^0$ $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle MBD)=90^0$ şi deci $BD \perp MB$. Dar $AB \perp (BCD)$ şi deci $AB \perp BD$. Atunci din $BD \perp MB$ şi $BD \perp AB$ $\Rightarrow BD \perp (AMB)$ şi deci $BD \perp AM$.

P8. Fie $ABCD$ un paralelogram cu laturile AB=10 cm, AD=6cm şi diagonala BD=8 cm. Fie P un punct de diagonala AC astfel încât AC= 4AP. În punctul P se ridică perpendiculara PM pe planul paralelogramului, PM=5 cm.

Să se găsească :

a) lungimea diagonalei AC;

b) distanţa punctului M la laturile si diagonalele paralelogramului.

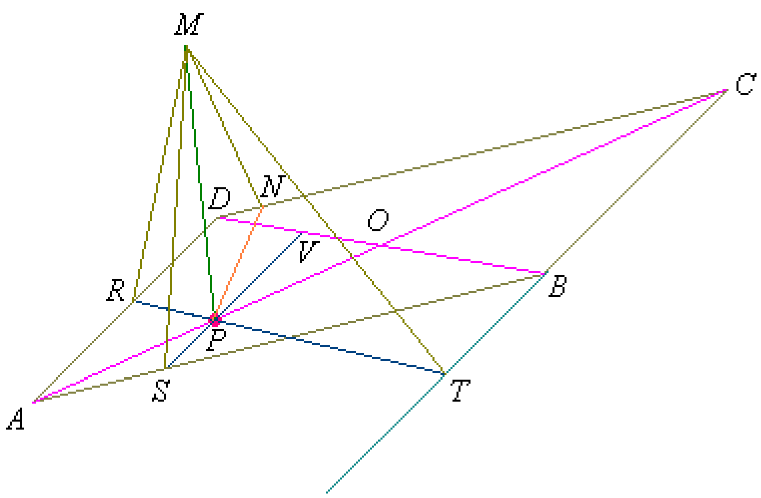

Fig. 32

Demonstraţie

a) Triunghiul *ADB* având laturile de 6,8 şi 10 cm este dreptunghic ($\sphericalangle ADB=90^0$).

În ΔAOD : $AO=\sqrt{AD^2+DO^2}$; $AO=2\sqrt{13}$ şi $AC=4\sqrt{13}$.

b) Fie : $PN \perp DC$, ($N\in DC$),

$PR \perp AD$, ($R\in AD$),

$PS \perp AB$, ($S\in AB$),

$PT \perp BC$, ($T\in BC$),

$PV \perp DB$, ($V\in DB$).

Se observă că patrulaterul *RDBT* este dreptunghi şi *RT* = 8 cm.

RP fiind linie mijlocie în triunghiul *ADO*, urmează că *RP*=2 cm; deci *PT*=6 cm.

Deoarece $NS \perp AB \Rightarrow NS=DD'$ (înălţimea triunghiului *ADB*); deci $NS=\dfrac{6\cdot 8}{10}=\dfrac{24}{5}$ cm.

Din asemănarea triunghiurilor *APS* şi *NCP* obţinem : $PS=\dfrac{6}{5}$ cm şi $PN=\dfrac{18}{5}$ cm.

Observăm că $PV=RD=\dfrac{AD}{2}=3$ cm. Din teorema celor trei perpendiculare deducem că : $MR \perp AD$, $MS \perp AB$, $MN \perp DC$, $MT \perp BC$ şi $MV \perp DB$; deci, avem :

$d(M, AD)=MR=\sqrt{MP^2+RP^2}$; $MR=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$ cm,

$d(M, DC)=MN=\sqrt{MP^2+PN^2}=\sqrt{25+\dfrac{324}{25}}=\sqrt{\dfrac{949}{5}}$ cm,

$d(M, AB)=MS=\sqrt{MP^2+PS^2}=\sqrt{25+\dfrac{36}{25}}=\sqrt{\dfrac{661}{5}}$ cm,

$d(M, BC)=MT=\sqrt{MP^2+PT^2}=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$ cm,

$d(M, DB)=MV=\sqrt{MP^2+VP^2}=\sqrt{25+9}=34$ cm,

$d(M, AC)=MP=5$ cm.

P9. Se consideră un tetraedru *VABC* cu următoarele proprietăţi: *ABC* este un triunghi echilateral de latură a, $(ABC)\perp(VBC)$, iar planele (*VAC*) şi (*VAB*) formează cu planul (*ABC*) unghiuri de măsură 60^0. Să se calculeze distanţa de la punctul *V* la planul (*ABC*).

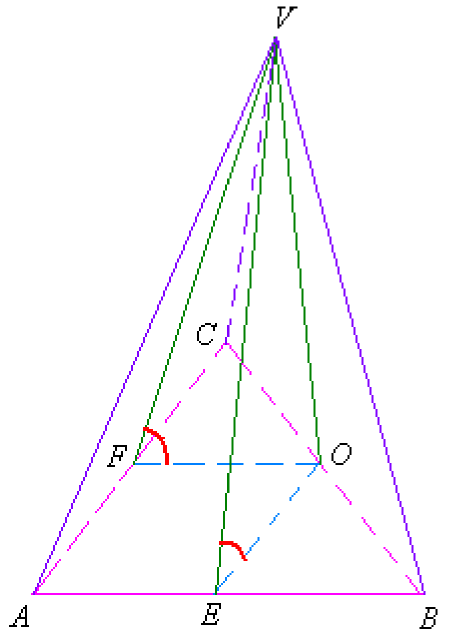

Fig. 33

Demonstraţie

Fie $E= pr_{AB}V$; $F= pr_{AC}V$; $O= pr_{(ABC)}V$ şi deoarece $(BVC) \perp (ABC) \Rightarrow O \in BC$.

Din $VO \perp (ABC)$, $VE \perp AB \subset (ABC) \Rightarrow OE \perp AB$. Deci, $m((\sphericalangle VAB),(\sphericalangle ABC))=m(\sphericalangle VEO)=60^0$.

Din $VO \perp (ABC)$, $VF \perp AC \subset (ABC) \Rightarrow OF \perp AC$ $\Rightarrow$ $m((\sphericalangle VAC),(\sphericalangle ABC))=m(\sphericalangle VFO)=60^0$.

Comparăm triunghiurile VOE şi VOF : $VO=VO$, $m(\sphericalangle VEO)=m(\sphericalangle VFO)=60^0$ $\Rightarrow$ cele două triunghiuri sunt congruente şi deci $OE=OF$.

Comparăm triunghiurile OEB şi OFC: $OE=OF$, $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=60^0$ $\Rightarrow$ triunghiurile sunt congruente şi deci $OC=OB=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$.

În triunghiul OEB : $m(\sphericalangle E)=90^0$, $m(\sphericalangle B)=60^0$, $OB=\frac{a}{2} \Rightarrow OE=OB\cdot \sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

În triunghiul VOE: $m(\sphericalangle O)=90^0$, $m(\sphericalangle VEO)=60^0$, $OE=\frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow VO=OE\cdot tg60^0=\frac{3a}{4}$.

P10. Două drepte d_1 şi d_2 sunt perpendiculare şi congruente în punctul O. Fie M un punct nesituat în planul (d_1, d_2). Distanţele de la M la cele două drepte sunt egale cu $3a$, respectiv $4a$, iar $OM=3a\sqrt{2}$. Să se afle distanţa de la punctul M la planul (d_1, d_2).

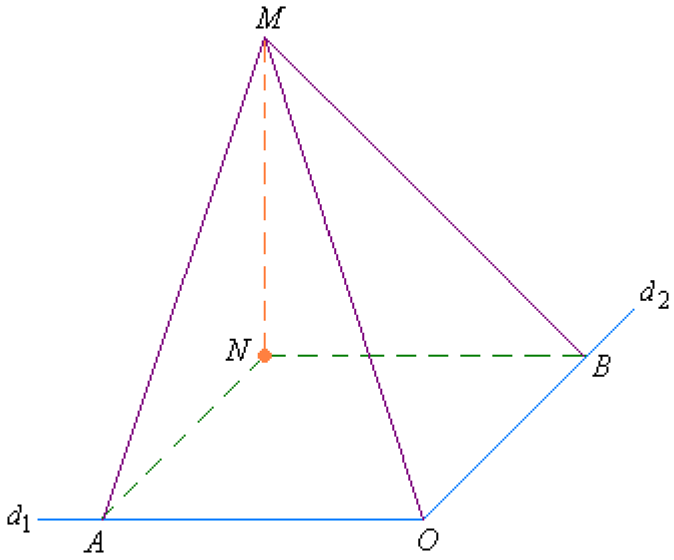

Fig. 34

Demonstraţie

Fie $MA \perp d_1$, $MB \perp d_2$ şi $MN \perp (d_1, d_2)$.

Din $MN \perp (d_1, d_2)$, $MA \perp OA \subset (d_1, d_2) \Rightarrow NA \perp AO$, (1).

Din $MN \perp (d_1, d_2)$, $MB \perp OB \subset (d_1, d_2) \Rightarrow NB \perp OB$, (2).

Din (1) şi (2) şi $AO \perp OB \Rightarrow AOBN$ este dreptunghi $\Rightarrow AN=OB$, $AO=NB$.

În ΔMAO, $(m(\sphericalangle A)=90^0)$: $AM=3a$, $MO=3a\sqrt{2}$, $AO=\sqrt{OM^2-AM^2}=3a$.

În ΔMNB, $m((\sphericalangle N)=90^0)$: $MB=4a$, $NB=AO=3a$, $MN=\sqrt{MB^2-NB^2}=a\sqrt{7}$.

P11. Dându-se cubul *ABCDA'B'C'D'*, să se afle distanţa de la o diagonală a cubului la o diagonală a unei feţe, cu care nu se intersectează.

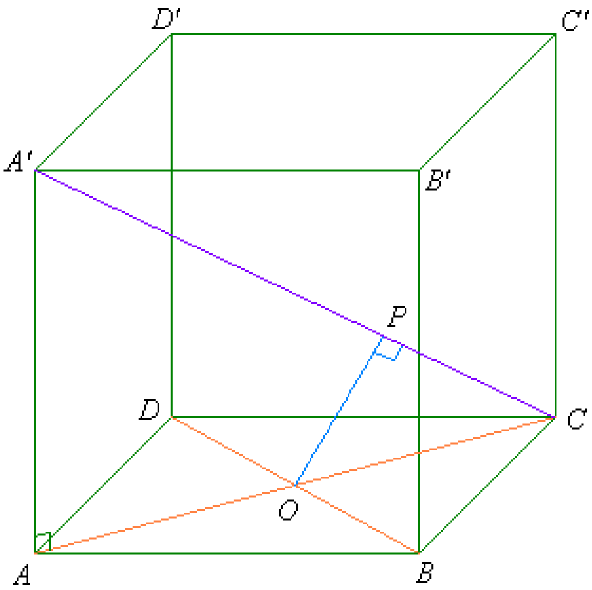

Fig. 35

Demonstraţie

Notăm cu a latura cubului. Calculăm distanţa de la diagonala BD a feţei $ABCD$ la diagonala $A'C$ a cubului.

Fie O centrul feţei $ABCD$ şi P proiecţia lui pe $A'C$. Muchia AA', fiind perpendiculară pe planul ($ABCD$), este perpendiculară pe diagonala BD. Aceasta este însă perpendiculară şi pe cealaltă diagonală a pătratului $ABCD$, deci pe AC, astfel încât BD va fi perpendiculară pe planul $(AA'C) \Rightarrow BD \perp OP \Rightarrow$ OP este perpendiculară comună a dreptelor BD şi $A'C \Rightarrow$ segmentul OP este distanţa pe care trebuie să o calculăm.

Avem : $\Delta OPC \sim \Delta ACA' \Rightarrow \dfrac{OP}{AA'} = \dfrac{OC}{A'C}$. Se obţine : $OP = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

P12. Fie semidreptele Ox, Oy, Oz în spaţiu care formează între ele unghiuri de 60^0. Fie A pe Ox astfel încât $OA = 2a$. Să se determine distanţele de la A la Oy, Oz, (yOz).

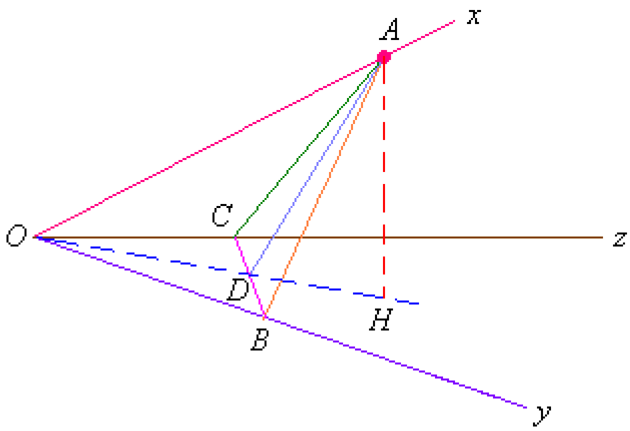

Fig. 36

Demonstraţie

Fie $AB \perp Oy$, $AC \perp Oz$, $AD \perp BC$ şi $AH \perp (yOz)$.

În ΔABO ($m(\sphericalangle B) = 90^0$) : $OA = 2a$, $m(\sphericalangle AOB) = 60^0$, $AB = AO \cdot \sin 60^0 = a\sqrt{3}$.

În ΔACO ($m\sphericalangle C = 90^0$) : $OA = 2a$, $m(\sphericalangle AOC) = 60^0$, $AC = AO \cdot \sin 60^0 = a\sqrt{3}$.

$m(\sphericalangle OAC) = m(\sphericalangle OAB) = 30^0$ (ca unghiuri complementare) $\Rightarrow$ $OC = OB = a$ (cateta ce se opune unghiului de 30^0) şi cum $m(\sphericalangle BOC) = 60^0 \Rightarrow \Delta BOC$ este echilateral cu $BC = a$.

Din $AC = AB \Rightarrow$ ΔABC isoscel şi cum $AD \perp BC$, AD şi mediană $\Rightarrow DB = DC$.

Dar, în ΔOBC echilateral $DB = DC$, $OB = BC$ şi $OD = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{3}$.

În ΔADB ($m(\sphericalangle D) = 90^0$) : $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Din construcţie : $AH \perp (yOz)$, $AD \perp BC \subset (yOz) \Rightarrow$ $HD \perp BC$. Dar şi $OD \perp BC$ $\Rightarrow O,D,H$ – coliniare. În ΔAOD, aplicăm *teorema generalizată a lui Pitagora* pentru latura *AD*: $AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2OD \cdot OH$; $OH = \dfrac{8a^2}{4a\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. În ΔAHO ($m(\sphericalangle H)=90^0$), $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

P13. Fie *ABC* un triunghi dreptunghic în *A* şi catetele *b* şi *c*. În *B* se ridică segmentul *BD=d*, perpendicular pe planul triunghiului. Notăm cu *M* şi *N* proiecţiile punctului *A* pe dreptele *BC* şi *CD*, iar cu *P* şi *Q* proiecţiile punctului *B* pe *AD* respectiv *DC*. Să se calculeze distanţa dintre planurile (*BPQ*) şi (*AMN*).

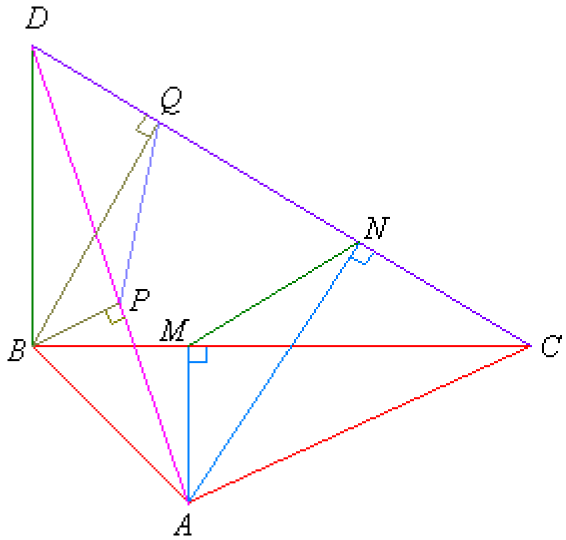

Fig. 37

Demonstraţie

Deoarece $DB \perp (BAC), BA \perp AC \subset (ABC) \Rightarrow DA \perp AC$. Deoarece $AB \perp AC$ *şi* $AC \perp AD \Rightarrow AC \perp (ADB) \Rightarrow AC \perp BD, AC \perp BP \subset (ABD)$ şi cum $BP \perp AD$ $\Rightarrow BP \perp (ACD)$ şi deoarece $BQ \perp CD \Rightarrow PQ \perp DC$.

Din $BQ \perp CD$ şi $PQ \perp DC \Rightarrow CD \perp (BQP)$.

Deoarece $(DBC) \perp (ABC)$ şi $MA \perp BC \Rightarrow MA \perp (BDC)$ şi cum $AN \perp DC \Rightarrow MN \perp CD$.Din $CD \perp MN, CD \perp AN \Rightarrow CD \perp (AMN)$.

Deci, $CD \perp (BQP), CD \perp (AMN) \Rightarrow (BQP) \parallel (AMN)$ şi deci, distanţa dintre cele două plane este *NQ*.

Din construcţie, rezultă că $QN = DC - DQ - NQ$.

În $\Delta ABC : BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$.

În $\Delta DBC: DC=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{d^2+b^2+c^2}$.

În ΔDBC, aplicăm teorema catetei şi astfel, $BD^2=DC\cdot QD$,

$$QD=\frac{d^2}{\sqrt{d^2+b^2+c^2}}$$

În ΔADC, aplicăm teorema catetei şi astfel, $AC^2=DC\cdot NC$,

$$NC=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$$

Se obţine,

$$QN=\frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$$

P14. Fie tetraedrul *ABCD*.

a) În cazul când tetraedrul este regulat şi *M* este mijlocul muchiei *AC*, arătaţi că $AC\perp(MBD)$.

b) În cazul când muchiile *AC, BC, CD* şi *DA* sunt congruente, iar *M* şi *N* sunt mijloacele muchiilor *AC* şi *BD*, demonstraţi că $MN\perp AC$ şi $MN\perp BD$.

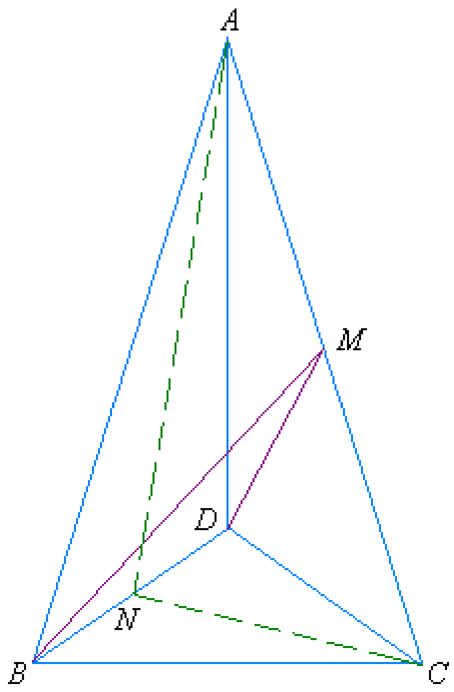

Fig. 38

Demonstraţie

a) Tetraedrul fiind regulat, rezultă că feţele lui sunt triunghiuri echilaterale şi atunci, în $\Delta ADC, DM$ este mediană şi deci şi înălţime, adică $DM\perp AC$. În $\Delta BAC, BM$ este mediană şi deci şi înălţime, adică $BM\perp AC$. Din $DM\perp AC$ şi $BM\perp AC\Rightarrow AC\perp(BDM)$.

b) În $\Delta BAD, AB = AD$, N mijlocul lui $BD \Rightarrow \; AN \perp BD$.

În $\Delta BCD, BC = DC$, N mijlocul lui $BD \Rightarrow CN \perp BD$. Din $AN \perp BD$ şi $CN \perp BD \Rightarrow$ $BD \perp (ANC)$.

Dar, $\Delta ABD \equiv \Delta BCD \Rightarrow AN = NC \Rightarrow \Delta ANC$ isoscel şi MN mediana corespunzătoare bazei , deci şi înălţime $\Rightarrow \; MN \perp AC$.

În $\Delta ADC, DM \perp AC, DM$ fiind şi mediană corespunzătoare bazei triunghiului isoscel *ADC*.

În $\Delta ABC, AB = BC, BM$ mediană, deci $BM \perp AC$. Din $DM \perp AC$ şi $BM \perp AC$ $\Rightarrow AC \perp (BDM)$. Dar, ΔBDM este isoscel (*DM*=*MB*) şi atunci *MN* fiind mediană este şi înălţime $\Rightarrow MN \perp BD$.

P15. Fie punctele *A, B, C* şi *D* necoplanare astfel încât *AD*=*BD*=*CD*. Fie *M, N* şi *P* mijloacele segmentelor *AB*, *BC* şi *AC*. Ştiind că *DM* şi *DP* sunt perpendiculare, să se arate că $DN \perp (DMP)$.

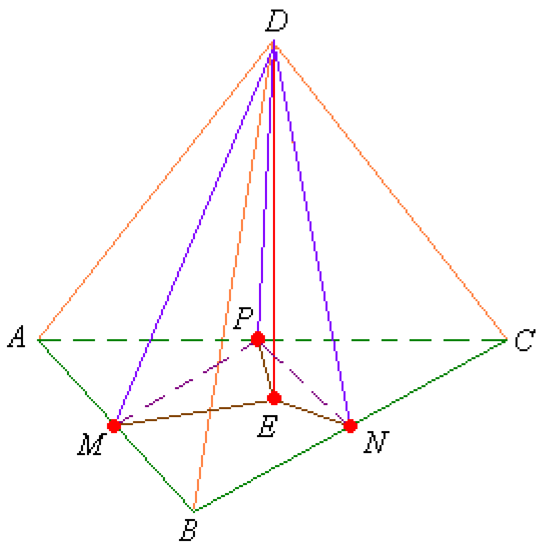

Fig. 39

Demonstraţie

Fie $E = pr_{(ABC)}D$. Deoarece *AD*=*BD*=*CD* $\Rightarrow$punctul *E* se află la intersecţia mediatoarelor ΔABC şi cum *M, N* şi *P* mijloacele segmentelor *AB*, *BC* şi *AC* $\Rightarrow$ $EM \perp AB$, $EN \perp BC, EP \perp AC$.

Din *N* şi *P* mijloacele segmentelor *BC* şi *AC* $\Rightarrow$ *NP* linie mijlocie $\Rightarrow NP \,||\, AB$.

Dar, $EM \perp AB \Rightarrow EM \Rightarrow PN$ şi cum $DF \perp (ABC) \supset PN \Rightarrow \; PN \perp (DEM) \Rightarrow$ $PN \perp MD$.

Din $DM \perp DP$ şi $DM \perp PN \Rightarrow DM \perp (DPN) \Rightarrow DM \perp PN$.

Din $DM \perp PN$ şi $DM \perp DN$ (1)

Din M şi P mijloacele segmentelor AB şi AC $\Rightarrow$ MP linie mijlocie $\Rightarrow MP \parallel BC$.

Dar, $EN \perp BC$ şi deci $EN \perp MP$. Cum $DE \perp (ABC) \supset MP \Rightarrow DE \perp MP$.

Din $EN \perp MP$ şi $DE \perp MP \Rightarrow MP \perp (DEN) \Rightarrow MP \perp DN$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $DN \perp (DMP)$.

P16. Într-un cub *ABCDEFGH* se notează cu *P* mijlocul laturii *AB* şi cu *Q* punctul de intersecţie dintre dreptele *BG* şi *CF*. Să se arate că dreapta *HQ* este perpendiculară pe planul (*CFP*), iar *AG* este paralelă cu acest plan.

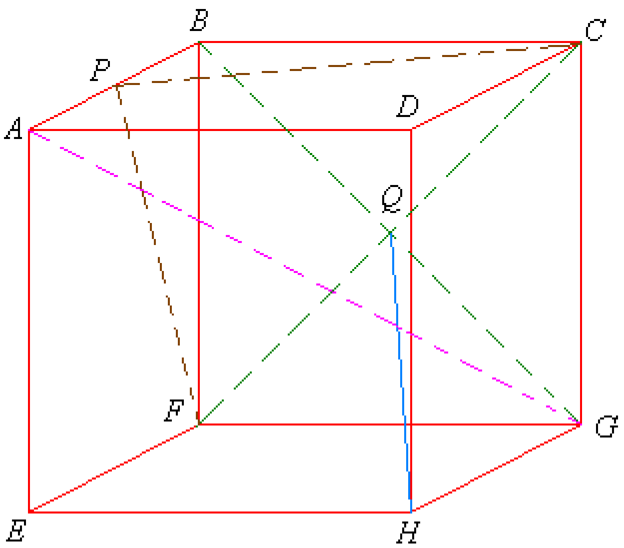

Fig. 40

Demonstraţie

Notăm cu *a* latura cubului, atunci $FH = CH = a\sqrt{2}$ şi în triunghiul isoscel *HCF*, mediana *HQ* este şi înălţime $\Rightarrow$ $HQ \perp CF$.

În ΔHQG dreptunghic $\Rightarrow$ cf. teoremei lui Pitagora că $HQ = \sqrt{HG^2 + GQ^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

În ΔPFC echilateral, *PQ* este mediană, deci şi înălţime $\Rightarrow$ $PQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

În ΔAPH dreptunghic $\Rightarrow$ conform teoremei lui Pitagora că $HP = \sqrt{HA^2 + PA^2} = \dfrac{3a}{2}$.

Dar, $HQ^2 + PQ^2 = HP^2 \Rightarrow HQ \perp PQ \Rightarrow HQ \perp (CFP)$.

În ΔABG, *PQ* este linie mijlocie $\Rightarrow PQ \parallel AG \Rightarrow AG \parallel (CFP)$.

P17. Fie patrulaterul strâmb *ABCD* astfel încât *AB*=*BC*=*CD*=*DA*. Fie *H* proiecţia lui *A* pe planul (*BCD*), iar *M* şi *N* mijloacele segmentelor *BC* şi *AH*. Să se demonstreze că $DN \perp (BCP)$, unde $\{P\} = MN \cap AD$.

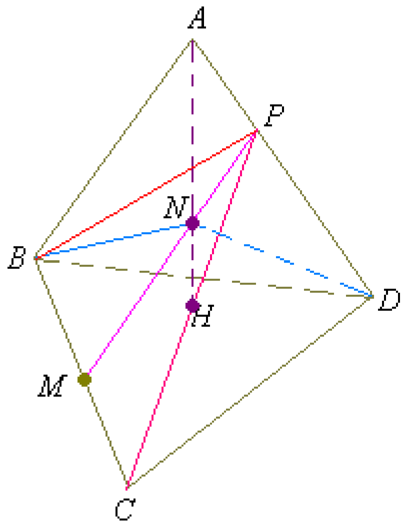

Fig. 41

Demonstraţie

Din AB=BC=CD=DA şi $AH \perp (BCD) \Rightarrow H$ este centrul cercului circumscris ΔBCD.
($\Delta AHB \equiv \Delta AHC \equiv \Delta AHD, m(\sphericalangle H)=90°, AH=AH, AB=AC=AD, HB=HC=HD$).

Dacă $AB=a \Rightarrow BH=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

În $\Delta AHB(m(\sphericalangle H)=90°), AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\sqrt{\frac{6a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

AH=HN=$\frac{AH}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

BN mediană în $\Delta AHB \Rightarrow BN=\sqrt{\frac{2(AB^2+BH^2)-AH^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+\frac{3a^2}{9})-\frac{6a^2}{9}}=$
$\frac{1}{6}\sqrt{18a^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Din $\Delta AHB \equiv \Delta AHD \equiv \Delta AHC \Rightarrow BN=NC=DN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

În $\Delta BND, BN^2+DN^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=a^2=BD^2 \Rightarrow \Delta BND$ este dreptunghic în $N \Rightarrow$
$BN \perp ND$.

Analog, dem. că $CN \perp ND \Rightarrow ND \perp (BCN)$ şi cum $NB, NC \subset (BCN)=(BCP)$
$\Rightarrow ND \perp (BCP)$.

P18. Fie α un plan, d o dreaptă în α şi A un punct exterior lui α. Din A se duce perpendiculara AB pe $d(B \in d)$, iar prin B perpendiculara d' pe d, situată în α. Se ia pe d' punctul C astfel încât $\sphericalangle ABC$ să fie un unghi ascuţit şi (BC)=(AB). Din C se duce perpendiculara CC' pe *AB* $(C' \in AB)$ şi se ia pe (*CB*) punctul *D* astfel încât $CD = AC'$. Să se arate că dreapta *AD* este perpendiculară pe planul α.

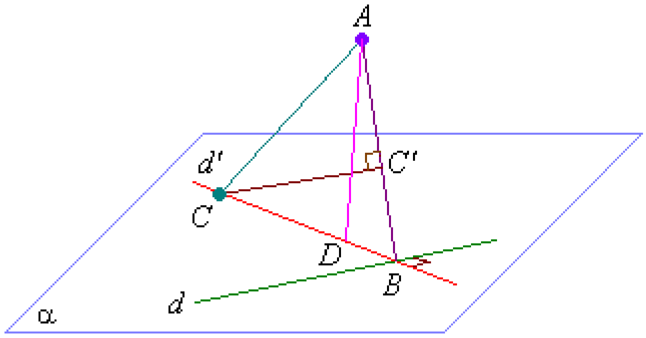

Fig. 42

Demonstraţie

Din $AB = BC \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACB$ şi cum $(AC') \equiv (CD)$ şi $(AC) \equiv (AC) \Rightarrow$ $\Delta ACC' \equiv \Delta CAD \Rightarrow$ $\sphericalangle CDA \equiv \sphericalangle AC'C \Rightarrow AD \perp BC$.

Dar $AB \perp d$ şi $BD \perp d \Rightarrow AD \perp \alpha$.

P19. Dintr-un punct exterior *A* unui plan α se duc pe planul α, perpendiculara *OA* şi oblicele *AB* şi *AC* $(O, B, C \in \alpha$ necoliniare). Fie H, H' ortocentrele triunghiurilor *ABC* şi *OBC*. Să se arate că HH' este perpendiculară pe planul (*ABC*).

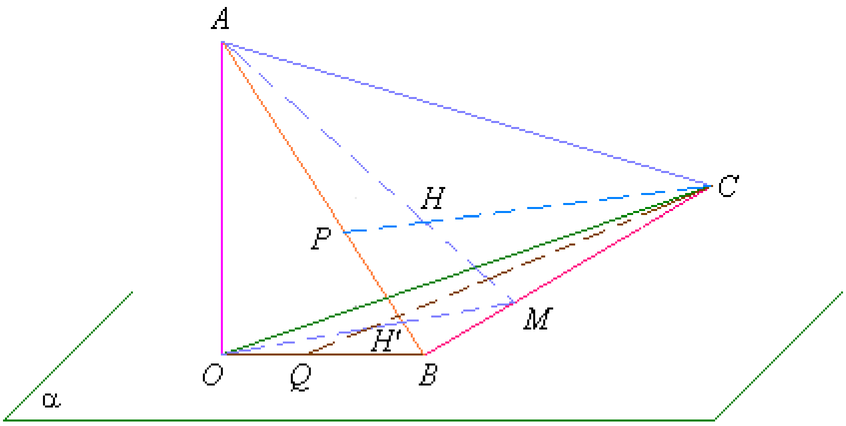

Fig. 43

Demonstraţie

Fie $OM \perp BC \Rightarrow H' \in OM$.

Din $AO \perp \alpha, OM \perp BC, BC \subset \alpha \Rightarrow AM \perp BC, H \in AM$.

Cum $H' \in OM$ şi $H \in AM \Rightarrow HH' \subset (AOM)$.

Avem $BC \perp OM, BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (AOM)$ şi cum $HH' \subset (AOM) \Rightarrow BC \perp HH'$.

Fie $CH \cap AB = \{P\}$ şi $CH' \cap OB = \{Q\}$.

Cum $AO \perp \alpha$ şi $CO \subset \alpha \Rightarrow AO \perp CQ$. Dar, $CQ \perp OB$ şi $CQ \perp (AOB) \Rightarrow CQ \perp AB$.

Din $AB \perp CQ$ şi $AB \perp CP \Rightarrow AB \perp (CQP)$. Dar, $HH' \subset (CQP) \Rightarrow AB \perp HH'$.

Din $HH' \perp BC$ şi $HH' \perp AB \Rightarrow HH' \perp (ABC)$.

P20. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră *M, N, P* şi *Q* centrele feţelor $BCC'B'$, $ABB'A'$, $ADD'A'$ şi $A'B'C'D'$. Să se demonstreze că planele (*PMQ*) şi (*PMN*) sunt perpendiculare.

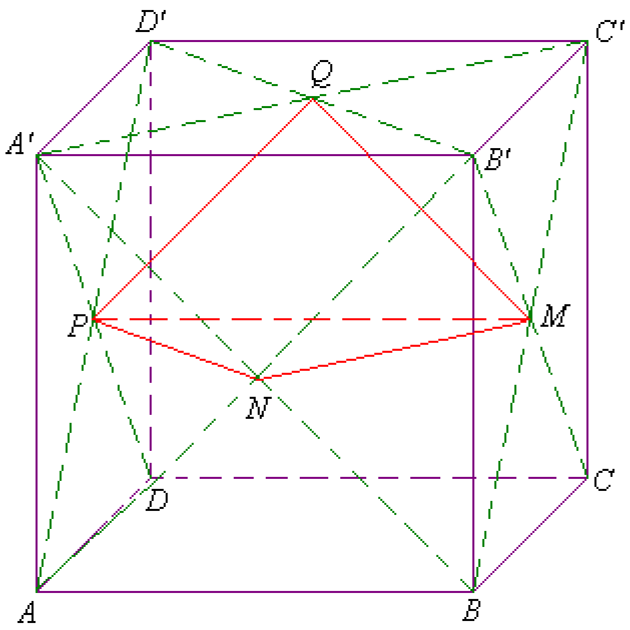

Fig. 44

Demonstraţie

Planul *(PMQ)* este paralel cu planul $(ABB'A')$ deoarece $QM \parallel A'B$ şi $PQ \parallel AB'$.

Planul *(PMN)* este paralel cu planul $(ABCD)$ deoarece $PN \parallel BD$ şi $MN \parallel AC$.

Cum planele $(ABCD)$ şi $(ABB'A')$ sunt perpendiculare, rezultă perpendicularitatea planelor *(PMQ)* şi *(PMN)*.